Colección "Matemática Educativa y Tecnología"

APLICACIONES SOBRE LA MODELACIÓN, LA VISUALIZACIÓN Y USO DE REPRESENTACIONES EN LA ERA NUMÉRICA

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro "El Infinito en un Junco" inicia su obra diciendo:

"Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente"

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona "La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción".

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encentres en este libro beneficios.

El *libro "Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"* es la parte práctica del libro anterior llamado *"Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"*, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro *"Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"*. Pérez menciona lo siguiente:

"El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión "En la Era Numérica"), que se entrecruza con los tres primeros."

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA[1] y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Graficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t, manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

---

[1] ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que liguen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM[2] no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

[2] Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1: Señalización para Protección Civil 1

Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C.

Capítulo 2: Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble 29

Christian Boissinotte

Capítulo 3: Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones 49

José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix.

Capítulo 4: Horas de luz solar 63

Cesar Martínez Hernández, María del Carmen Olvera Martínez.

Capítulo 5: Caminando frente al sensor de movimiento 73

Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.

Capítulo 6: Gráficas dinámicas ligadas 83

Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.

Capítulo 7: Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales 91

Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza.

Capítulo 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a través de la Visualización 101

José David Zaldívar Rojas, Beatriz Adriana Vega Herrera.

Capítulo 9: Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones 125

César Fabián Romero Félix

Capítulo 10: Situación 1: Estimando la temperatura 149

María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.

Capítulo 11: Antenas telefónicas 162

María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.

Capítulo 12: Visualización matemática y GeoGebra 173

Fernando Hitt

Capítulo 13: Nociones de Aproximación y Tendencia 179

Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea.

Capítulo 14: Le Jardin des Citrouilles 187

Fernando Hitt, Mireille Saboya.

Capítulo 15: Rectángulos y círculos 199

Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt.

Capítulo 3: Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones

Actividades didácticas

José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix. [1]

Introducción

El propósito de las actividades siguientes, es que podamos parametrizar las superficies que limitan un volumen como el que se muestra en la Figura 1. Como puede observarse en esta figura, el volumen está limitado por cinco superficies, de las cuales tres son planas (las que están sobre los planos coordenados) y dos son no planas.

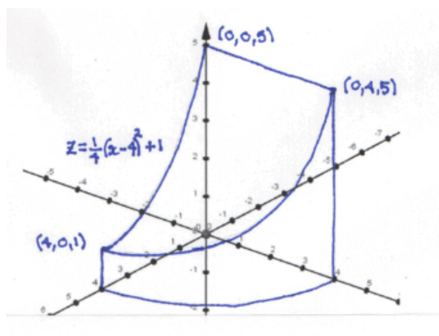

Figura 1

Antes de introducirnos a las especificaciones técnicas, en esta primera parte trataremos de familiarizarnos con las ideas geométricas que están detrás de la parametrización.

La primera idea es que podamos parametrizar un segmento (por ejemplo vertical) con un extremo sobre alguno de los ejes coordendos, como el que se muestra en la Figura 2.

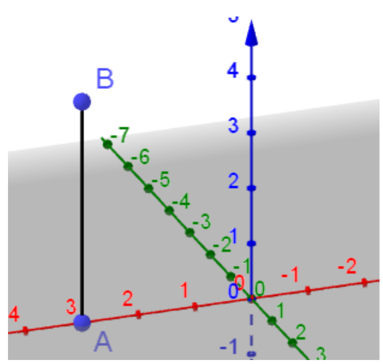

Figura 2. Segmento vertical con un extremo sobre el eje x

[1] Universidad de Sonora, México

Secuencia 1

Actividad 1.

a) Abra el archivo Graf_1, en la vista 3D podrá ver una gráfica como la que se muestra en la Figura 3. Active el "Rastro" del segmento AB y arrastre el punto A entre $x = 0$ y $x = 4$. Describa la figura que ha generado el segmento AB.

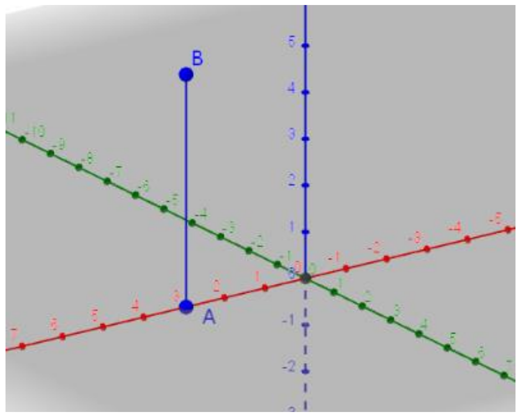

Figura 3

b) Abra ahora el archivo Graf_2 (Figura 4) y haga lo mismo que en la actividad anterior, es decir con el "rastro" del segmento activado, arrastre el punto C entre $x = 0$ y $x = 4$. ¿Qué figura ha obtenido ahora? Explique por qué la figura que acaba de obtener no es la misma que la obtenida en el inciso anterior.

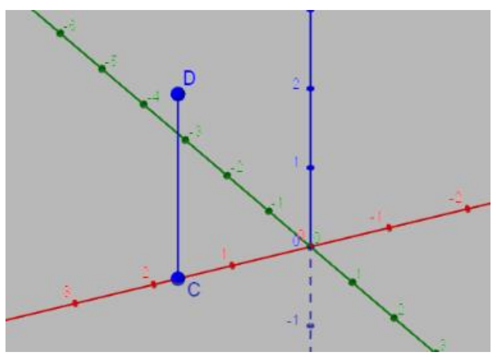

Figura 4.

Actividad 2.

La superficie que ha graficado está en el plano XZ y puede interpretarse como la proyección sobre el plano XZ de la figura no plana que se muestra parcialmente en la Figura 5 y que ha sido generada por otro segmento como el CD, pero que se mueve ahora sobre una curva, que en este caso es un cuarto de circunferencia.

Abra el archivo Graf_3 y arrastre el punto A, para mover los segmentos AB y CD.

a) ¿Cómo están relacionados los segmentos AB y CD?
b) ¿Qué superficie trazan cada uno de estos segmentos al arrastrarlos?

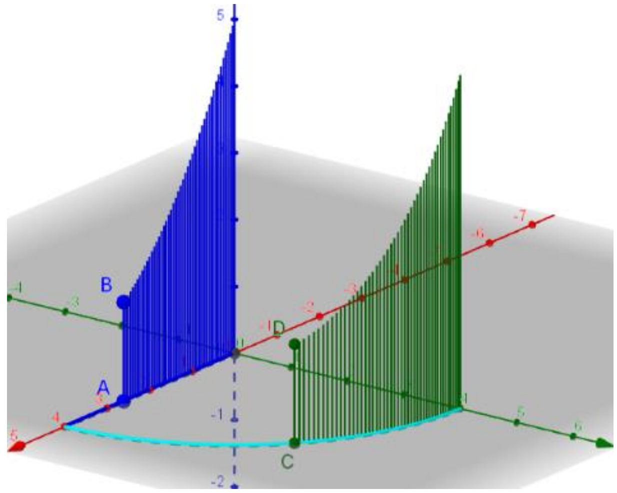

Figura 5

Actividad 3.

Al igual que se hizo con las dos superficies anteriores, la superficie sobre el plano XY (que tiene forma de un cuarto de círculo) puede ser graficada como el lugar geométrico trazado por un segmento variable y luego tomar este mismo segmento como la proyección de otro que recorre la curva definida por la función $f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 1$ (ver la función de la Figura 1).

Abra el archivo Graf_4 y use el punto A para arrastrar los segmento AC y BD.

a) ¿Cómo están relacionados los segmentos AC y BD?
b) ¿Qué superficie trazan cada uno de estos segmentos al arrastrar el punto A?

Actividad 4.

Construya en GeoGebra 3D un segmento sobre el plano YZ que permita trazar la superficie que falta para cerrar el volumen. Llame a su archivo Graf_5 y envíelo por correo electrónico al profesor.

Secuencia 2

Las ideas gráficas discutidas en la Secuencia 1 pretenden dejar claro que la posiblididad de trazar las superficies que nos interesan, depende en gran parte de la graficación de un segmento en 3D, que podamos mover apropiadamente.

En lo que se ha discutido hasta ahora, las superficies han sido trazadas activando el "rastro" de un segmento, lo que genera un trazo que en GeoGebra no es estable, es decir se puede borrar al menor descuido.

Por esta razón, en las actividades siguientes centraremos nuestra atención en utilizar las herramientas para graficar las versiones parametrizadas de un segmento y una superficie, como gráficas estables automatizadas por GeoGebra.

Actividad 1.

Grafique en GeoGebra 3D los puntos $A = (4{,}0{,}0)$ y $B = (4{,}0{,}5)$

a) Grafique ahora el vector $u = (0{,}0{,}5)$, ¿qué relación existe entre el vector u y los puntos A y B?
b) Capture en la Barra de Entrada de GeoGebra el vector ku y luego el punto $P = ku$, para asignar al vector ku su punto extremo P.
c) ¿Cuál será el lugar geométrico determinado por el punto P (extremo del vector ku), cuando k varía entre 0 y 1?
d) Si tiene problemas para visualizar el lugar geométrico solicitado, trace un Deslizador k $(0 \leq k \leq 1)$ y solicite a GeoGebra el Lugar Geométrico del punto P, cuando k varía.
e) ¿Qué relación existe entre el lugar geométrico determinado por el vector ku al hacer variar k entre 0 y 1 y el segmento AB?
f) Trace ahora el vector $v = (4{,}0{,}0)$ y luego el vector $v + ku$.
g) Al igual que antes, capture en GeoGebra el punto $Q = v + ku$, para asignar al vector $v + ku$ su punto extremo Q.
h) ¿Cuál es el lugar geométrico del punto Q (extremo del vector $v + ku$), cuando se hace variar k?
i) Grabe su archivo de GeoGebra con el nombre Param1.ggb

Actividad 2.

Ahora le daremos instrucciones a GeoGebra para que grafique el lugar geométrico de la actividad anterior, pero de manera automática.

a) Sean los vectores $X = (x, y, z)$ todos los vectores del lugar geométrico trazado, es decir

$$X = (x, y, z) = v + ku = (4{,}0{,}0) + k(0{,},0{,}5)$$

Utilice la ecuación anterior, para expresar las coordenadas x, y y z, en términos de k. Las tres ecuaciones obtenidas se conocen como las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico.

b) GeoGebra puede graficar directamente el lugar geométrico anterior, capturando estas ecuaciones en el comando "Curva", para curvas en 3D de la Barra de Entrada (Figura 6). Capture las ecuaciones paramétricas y verifique que la curva trazada con este comando, coincide con la gráfica del lugar geométrico determinado por $v + ku$ (más exactamente por su punto extremo Q), $0 \leq k \leq 1$. Obsérvese que las ecuaciones paramétricas dependen de un solo parámetro, mismo que es solicitado por el comando “Curva” de GeoGebra.

Entrada: **Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)**

Figura 6

Actividad 3.

En la actividad anterior, se ha trazado un segmento vertical con el extremo inferior sobre el Eje X. Como se ha visto antes, el movimiento de este segmento puede generar una superficie plana. La expresión algebraica del segmento mencionado era la siguiente para $0 \leq k \leq 1$.

$$X = (x, y, z) = v + ku = (4,0,0) + k(0,0,5) = (4,0,5k)$$

Obsérvese que cuando el parámetro k varía entre 0 y 1, la única coordenada de X que cambia es la coordenada en z, puesto que el vector $v = (4,0,0)$ de la suma, está fijo.

Si queremos que el segmento AB se mueva para generar una superficie, tendremos que sustituir el vector v por un vector que se mueva a lo largo del eje x, por ejemplo por el vector mv, que podemos hacer variar, haciendo variar el parámetro m.

a) Considere ahora el conjunto de vectores M, tales que:
$M = (x, y, z) = mv + ku = m(4,0,0) + k(0,0,5) = (4m, 0,5k)$, con $0 \leq m \leq 1$ y $0 \leq k \leq 1$

Use la igualdad anterior para expresar cada una de las variables x, y y z en términos de m y k. A las tres ecuaciones obtenidas se les conoce como las ecuaciones paramétricas de la superficie generada.

Capture estas ecuaciones en el comando Superficie, que puede encontrar en la barra de entrada de GeoGebra. En la Figura 7 puede verse este comando, que le pedirá además que especifique los parámetros m y k y el rango de variación de estos parámetros.

Describa la superficie que GeoGebra ha graficado.

Entrada: **Superficie(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro 1>, <Valor inicial>, <Valor final>, <Parámetro 2>, <Valor inicial>, <Valor final>)**

Figura 7

b) En la superficie:

$$M = (x, y, z) = mv + ku = m(4,0,0) + k(0,0,5) = (4m, 0,5k), \text{ con } 0 \leq m \leq 1 \text{ y } 0 \leq k \leq 1$$

Cambie el rango de variación $0 \leq m \leq 1$ de m, por $1 \leq m \leq 2$. ¿Qué cambio se produjo en la superficie graficada en el inciso a)? Explique a qué se debe este cambio.

c) A veces conviene usar vectores unitarios sobre los ejes de coordendas, en lugar de los vectores u y v; pero si queremos parametrizar la misma superficie, tendremos que cambiar los rangos de variación de los parámetros.

Verifique por ejemplo, que la superficie anterior:

$$M=(x,y,z)=mv+ku=m(4{,}0{,}0)+k(0{,}0{,}5)=(4m,0{,}5k),\text{ con }0\le m\le 1\text{ y }0\le k\le 1$$

coincide con la superficie:

$$M=(x,y,z)=mv+ku=m(1{,}0{,}0)+k(0{,}0{,}1)=(m,0,k),\text{ con }0\le m\le 4\text{ y }0\le k\le 5$$

EJERCICIO. Parametrizar la superficie plana de la Figura 1, que está sobre el plano YZ.

Actividad 4.

Como podrá verse en la gráfica construida en la actividad anterior, el segmento deslizado sobre el eje x, mantiene su magnitud constante e igual a 5. Si queremos parametrizar una superficie como la que muestra la Figura 1, sobre el plano XZ, tendremos que hacer variar el extremo superior del segmento AB, de acuerdo con la función $z(x)=\frac{1}{4}(x-4)^2+1$.

Como el punto A del segmento (sobre el eje x), tendrá coordenadas $mv=m(1{,}0{,}0)=(m,0{,}0)$, para cada vector $(m,0{,}0)$ con $0\le m\le 4$, la función z tomará el valor $z(m)=\frac{1}{4}(m-4)^2+1$, entonces al vector mv habrá que sumar el vector ku, donde el vector u estará definido para cada m, como $u=(0{,}0,z(m))$, tendremos entonces que $ku=k(0{,}0,z(m))$ con $0\le k\le 1$. Se obtendrá así la ecuación vectorial:

$$M=(x,y,z)=mv+ku=m(1{,}0{,}0)+k(0{,}0,z(m))=(m,0,kz(m)),$$

$$\text{donde }0\le m\le 4\text{ , }0\le k\le 1\text{ y }z(m)=\frac{1}{4}(x-4)^2+1$$

En la Figura 8, puede verse cómo se ha construido el segmento AB, que al desplazarse sobre el eje x, trazará la superficie bajo la curva.

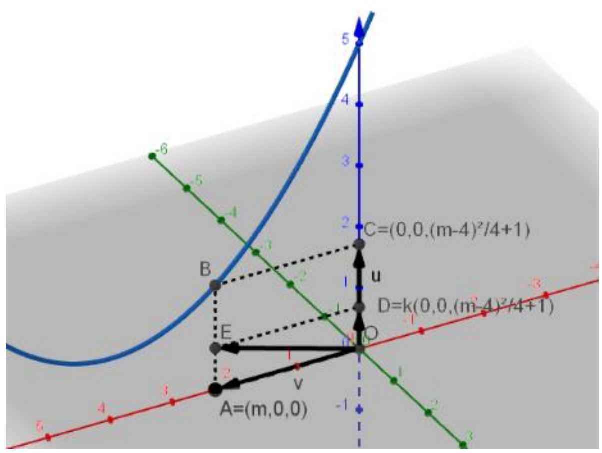

Figura 8

EJERCICIO. Parametrice en el plano XZ, la superficie bajo la curva $z=\operatorname{sen}(x)$, para $0\le x\le 2$

EJERCICIO. Parametrice en el plano YZ, la superficie bajo la curva $z=3\sqrt{1-\frac{y^2}{25}}$, para $0\le y\le 3$

Actividad 5.

Como se ha visto en la actividad anterior, el segmento AB que genera la superficie plana, se está desplazando sobre el eje x "dejando rastro", es decir generando para cada m_0 fija, todos los puntos del segmento que se traza al hacer variar k entre 0 y 1, y que son los puntos de coordendas $(m_0, 0, k(\frac{1}{4}(m_0-4)^2+1)$ para $0 \leq k \leq 1$.

Si ahora queremos un segmento PQ que se desplace sobre el arco de circunferencia trazado en la Figura 1, es decir sobre la curva $\{x^2+y^2=16, x \geq 0, y \geq 0, z=0\}$; entonces el segmento PQ puede obtenerse trasladando el segmento AB, según el vector $(0, \sqrt{16-m^2}, 0)$. Tendremos así que para cada m, se habrá generado el segmento PQ y al variar la m, este segmento se desplazará sobre el arco ya mencionado, los puntos (x, y, z) de la nueva superficie, tendrán entonces la forma:

$$(x,y,z) = \left(m, 0, k(\frac{1}{4}(m-4)^2+1)\right) + \left(0, \sqrt{16-m^2}, 0\right)$$

$$= \left(m, \sqrt{16-m^2}, k\left(\frac{1}{4}(m-4)^2+1\right)\right) \qquad (1)$$

En la Figura 9 puede observarse que para cada valor de m, se tiene un segmento PQ que se traza cuando la k varía entre 0 y 1. Y cuando m varía entre 0 y 4, se traza la superficie que queremos.

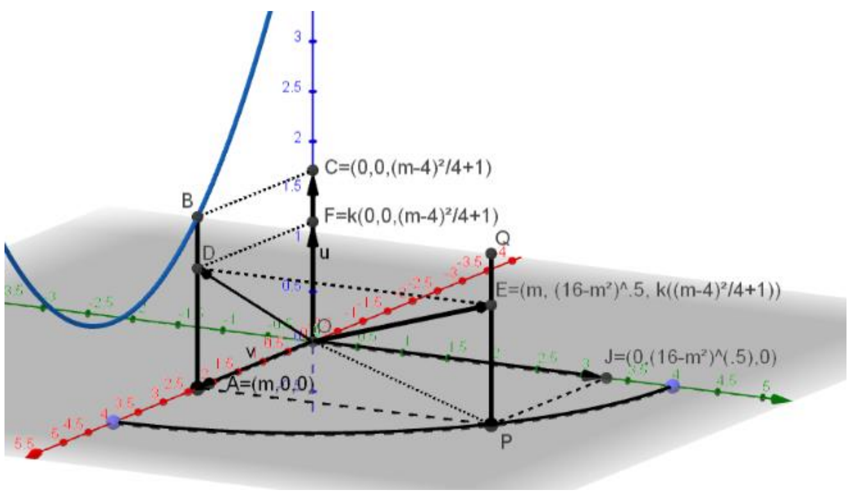

Figura 9

Actividad 6.

a) A partir de la ecuación (1) de la actividad anterior, exprese las variables (x, y, z) en términos de m y k.

$$x =$$
$$y =$$
$$z =$$

b) En la barra de entrada de GeoGebra, capture estas expresiones y especifique los rangos de variación de los parámetros m y k. En la vista 3D, debiera mostrarse una gráfica como la que puede verse en la Figura 10.

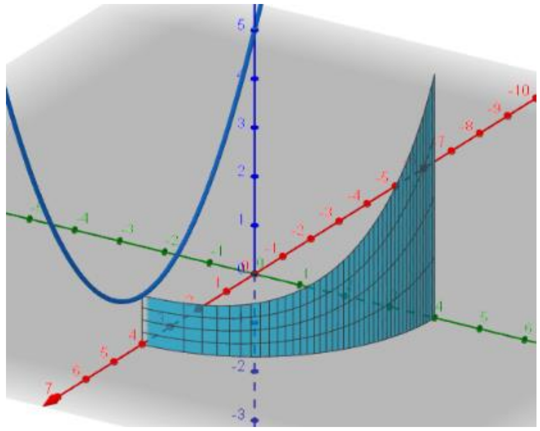

Figura 10

EJERCICIO. La superficie anterior ha sido "montada" sobre la curva $\{x^2 + y^2 = 16, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$, parametrice la superficie "montada" sobre la curva $\{x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$.

¿Qué cambios tendría que hacer en la ecuación (1) para obtener esta superficie?

Actividad 7.

En esta actividad parametrizaremos las dos superficies que pueden verse en la Figura 11. De nueva cuenta, se considerará el "fondo" del volumen como la proyección sobre el plano XY de la "tapa" del volumen.

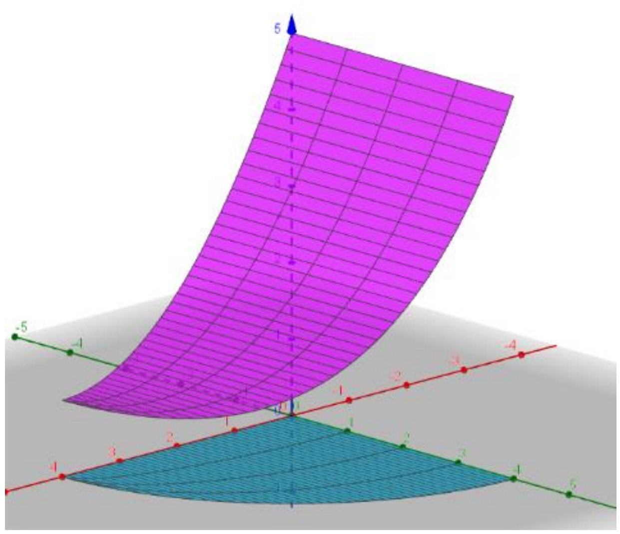

Figura 11

a) En la Figura 12, puede verse cómo se ha parametrizado el "fondo" del volumen.

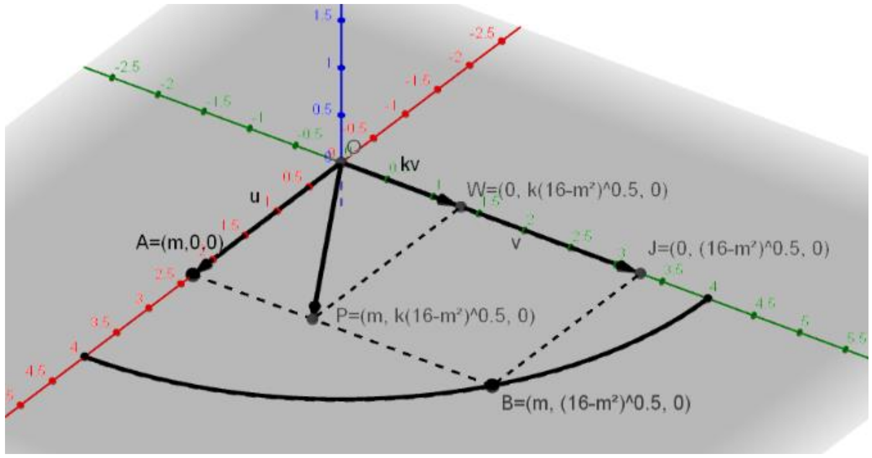

Figura 12

El segmento AB es trazado por la suma $u + kv$ al hacer variar k entre 0 y 1. Y cuando m varía entre 0 y 4 se trazan todos los segmentos que "llenan" el cuarto de circunferencia.

Use las coordenada del punto P para encontrar las ecuaciones paramétricas de la superficie a parametrizar, captúrelas en la barra de entrada usando el comando mostrado en la Figura 7 y verifique que se trata del cuarto de circunferencia de la Figura 11.

b) En la Figura 13, puede verse cómo se ha parametrizado la "tapa" del volumen.

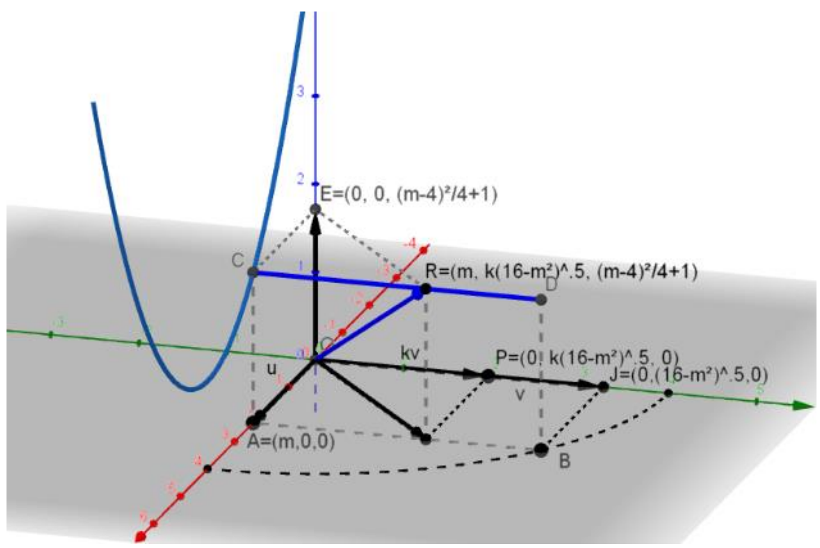

Figura 13

El segmento AB es trazado por la suma $u + kv$ al hacer variar k entre 0 y 1. Y cuando m varía entre 0 y 4 se generan todos los segmentos que trazan el "techo" del volumen.

Use las coordenadas del punto R para encontrar las ecuaciones paramétricas de la superficie a parametrizar, captúrelas en la barra de entrada usando el comando mostrado en la Figura 7 y verifique que se trata de la superficie superior mostrada en la Figura 13.

EJERCICIO

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones

Parametrice las superficies que cubren el sólido mostado en la Figura 14.

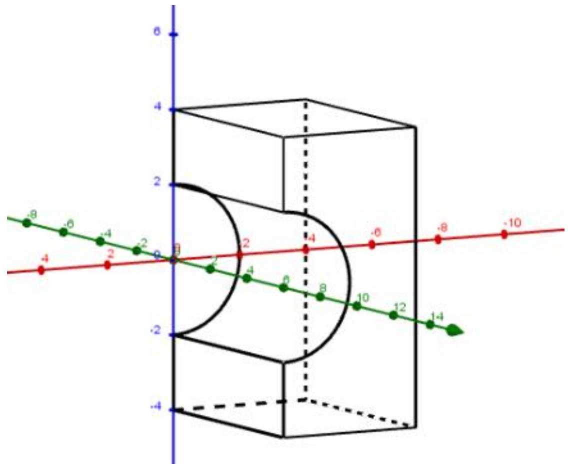

Figura 14

Secuencia 3

En la parametrización de una superficie no plana hay dos elementos claves, el primero es la indentificación de la superficie plana que resulta de proyectar la superficie sobre algunos de los planos coordenados, la segunda es la determinación de la función o funciones que delimitan la superficie plana identificada como proyección. Estas funciones no siempre están dadas y con frecuencia tendremos que conformarnos con una aproximación a la función que limita la superficie requerida.

En esta secuencia aprenderemos a parametrizar un objeto físico, para ello tomaremos como ejemplo un fragmento de riel ferroviario, como el que se muestra en la Figura 15a. Usaremos para ello las dimensiones de la sección del riel, que se muestra en la Figura 15b.

Figura 15ª

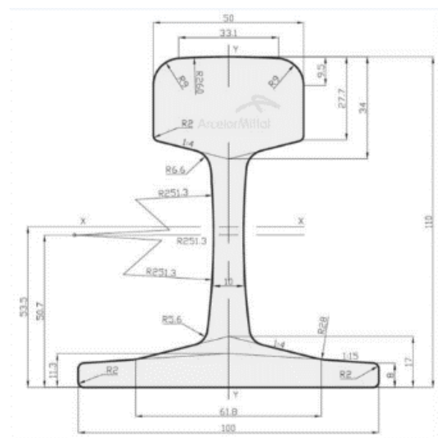

Figura 15b

Primero pegaremos la sección del riel en la vista gráfica de GeoGebra y la colocaremos como más convenga. Como la idea es que los contornos del riel puedan aproximarse ajustando puntos sobre el contorno con gráficas de funciones, rotaremos la sección y la pegaremos tratando de aprovechar los ejes de simetría de la sección, por ejemplo como se ve en la Figura 16.

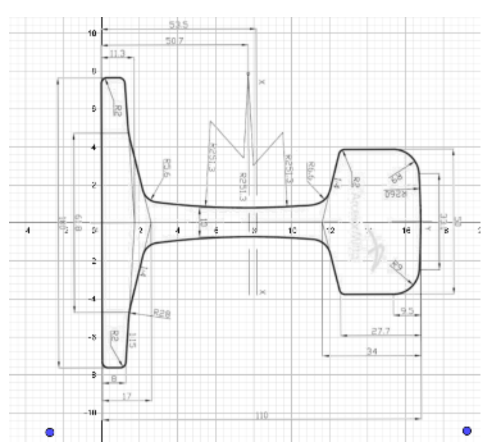

Figura 16

Hecho lo anterior podemos trazar algunos puntos sobre el contorno de la figura y luego usar, por ejemplo, el comando “AjustePolinómico” para ir aproximando el contorno. En la Figura 17 se muestra el comando de GeoGebra que se usará.

Figura 17

En la Figura 18, se han trazado cinco puntos sobre el contorno de la sección del riel. Los puntos C,D y E han sido ajustados con una función cuadrática f y los puntos E, F y G con otra cuadrática g.

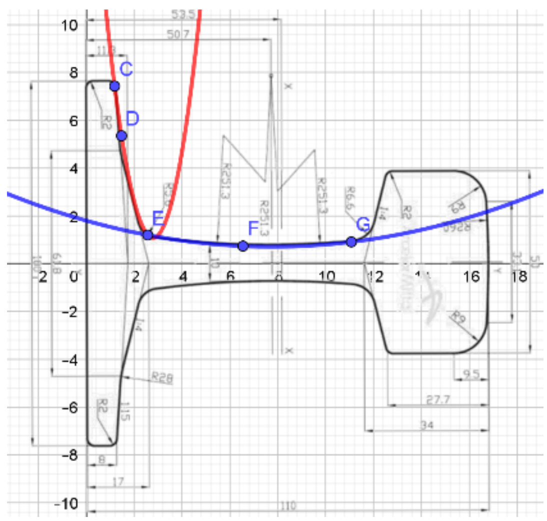

Figura 18

Con ellos parametrizaremos la superficie bajo las curvas, desde la abscisa de C, hasta la abscisa de G, en dos partes. Las superficies parametrizadas quedarán como sigue:

$M = (x, y, z) = (m, 0,0) + k(0, f(m), 0) = (m, kf(m), 0);\ 1.18 \leq m \leq 2.56;\ -1 \leq k \leq 1$

$N = (x, y, z) = (m, 0,0) + k(0, g(m), 0) = (m, kg(m), 0);\ 2.56 \leq m \leq 11.57;\ -1 \leq k \leq 1$

Obsérvese que el parámetro k se hizo variar entre -1 y 1, para que la superficie parametrizada incluya la superficie que está por debajo del eje x. Como puede verse en la Figura 19, la superficie se ha graficado en 3D, pero en el plano XY. Para cambiar la superficie de plano coordenado es suficiente con intercambiar apropiadamente las coordenadas de la parametrización como se ve en la Figura 20.

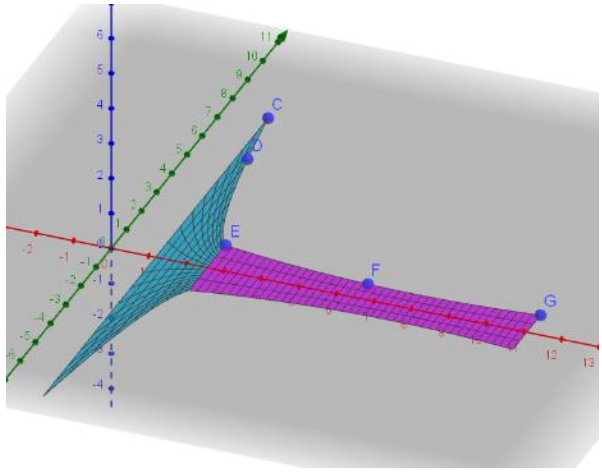

Figura 19

La Figura 20 muestra el aspecto de la superficie en el plano XZ, después de un intercambio de coordenadas de la parametrización.

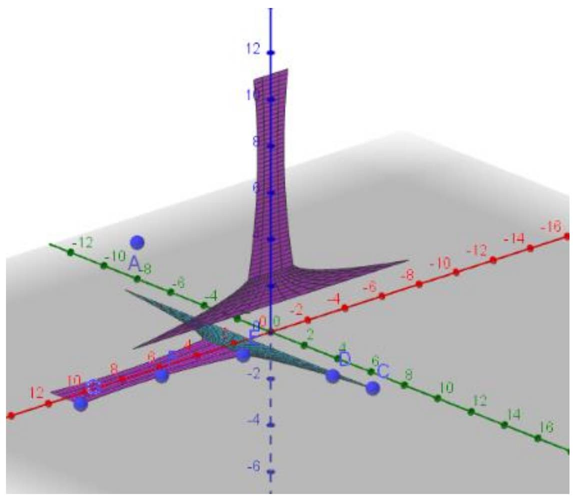

Figura 20.

Actividad 1.

Complete la aproximación de los contornos del riel ferroviario y parametrice todas las superficies que cubren el sólido.

Actividad 2.

a) Seleccione un objeto físico para parametrizar las superficies que lo cubren.
b) Tome fotografías del objeto que puedan ser interpretados como proyecciones sobre los planos coordenados.
c) Pegue la o las fotografías en la vista gráfica de GeoGebra y parametrícelas.
d) Parametrice las superficies que cubren el cuerpo completo.
e) El objeto a parametrizar también podría ser tomado de fotografías o imágenes de Internet.